BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

La qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 5 pages numérotés de 1/5 à 5/5.

EXERCICE 1 (5 points)

Une entreprise appelle des personnes par téléphone pour leur vendre un produit.

- L'entreprise appelle chaque personne une première fois :
  - la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à $0{,}6$;
  - si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à $0{,}3$.
- Si la personne n'a pas décroché au premier appel, on procède à un second appel :
  - la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à $0{,}3$;
  - si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à $0{,}2$.
- Si une personne ne décroche pas au second appel, on cesse de la contacter.

On choisit une personne au hasard et on considère les évènements suivants :

D_1 : « la personne décroche au premier appel » ;
D_2 : « la personne décroche au deuxième appel » ;
A : « la personne achète le produit ».

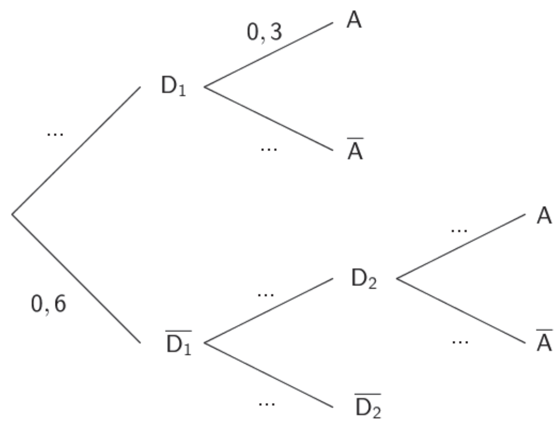
Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.

2. En utilisant l'arbre pondéré, montrer que la probabilité de l'évènement A est $\mathrm{P(A)} = 0{,}204$.

3. On sait que la personne a acheté le produit.
Quelle est la probabilité qu'elle ait décroché au premier appel ?



Partie B

On rappelle que, pour une personne donnée, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à $0{,}204$.

1. On considère un échantillon aléatoire de 30 personnes.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes de l'échantillon qui achètent le produit.

a. On admet que X suit une loi binomiale. Donner, sans justifier, ses paramètres.

b. Déterminer la probabilité qu'exactement 6 personnes de l'échantillon achètent le produit. Arrondir le résultat au millième.

c. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X. Interpréter le résultat.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère désormais un échantillon de n personnes. Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins l'une des personnes de l'échantillon achète le produit soit supérieure ou égale à $0{,}99$.

EXERCICE 2 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3x + 1 - 2x\ln(x)\ .$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2. **a.** Démontrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = 1 - 2\ln(x)\ .$$

   b. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. On fera figurer dans ce tableau les limites ainsi que la valeur exacte de l'extremum.

3. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\,;+\infty[$. On notera α cette solution.

   b. En déduire le signe de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

4. On considère une primitive quelconque de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. On la note F.

   Peut-on affirmer que la fonction F est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;+\infty\right[$? Justifier.

5. **a.** Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.
   Quelle est la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses tangentes ?

   b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

   c. Déduire des questions **5.a** et **5.b** que pour tout réel x strictement positif :

$$\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}\ .$$

EXERCICE 3 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1\,.$$

Partie A

Cette partie est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, une absence de réponse, ou une réponse multiple, ne rapporte ni n'enlève de point.

1. La valeur de u_2 est égale à :

a. $\frac{11}{4}$ **b.** $\frac{13}{2}$

c. $3{,}5$ **d.** $2{,}7$

2. La suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n$ est :

a. arithmétique de raison $\frac{1}{2}$. **b.** géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

c. constante. **d.** ni arithmétique, ni géométrique.

3. On considère la fonction ci-dessous, écrite de manière incomplète en langage Python.

`n` *désigne un entier naturel non nul.*

On rappelle qu'en langage Python « `i in range(n)` » *signifie que* `i` *varie de* `0` *à* `n-1`.

```
1 def terme(n):
2    U=3
3    for i in range(n):
4       ..................
5    return U
```

Pour que `terme(n)` renvoie la valeur de u_n, on peut compléter la ligne **4** par :

a. `U=U/2+(i+1)/2+1` **b.** `U=U/2+n/2+1`

c. `U=U/2+(i-1)/2+1` **d.** `U=U/2+i/2+1`

Partie B

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$n \leq u_n \leq n + 3\,.$$

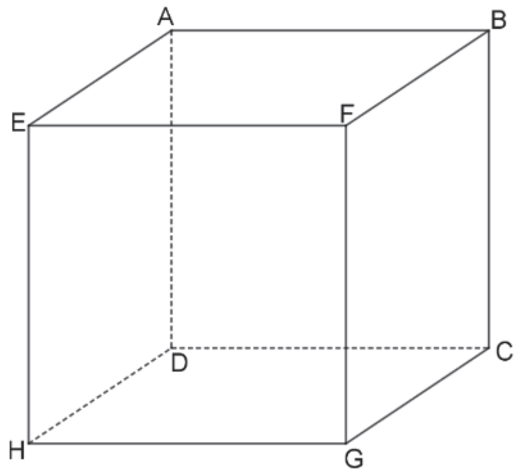
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$.

EXERCICE 4 (5 points)

On considère le cube $\mathrm{ABCDEFGH}$ ci-dessous tel que $\mathrm{AB} = 1$.

On note M le centre de la face BCGF et N le centre de la face EFGH.



On se place dans le repère orthonormé $(\mathrm{D}\,; \overrightarrow{\mathrm{DH}}, \overrightarrow{\mathrm{DC}}, \overrightarrow{\mathrm{DA}})$.

1. Donner sans justifier les coordonnées des points F et C.

2. Calculer les coordonnées des points M et N.

3. **a.** Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ est normal au plan (HFC).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (HFC).

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG).

5. Démontrer que le point R de coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point G sur le plan (HFC).

6. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (FG) est :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

   Démontrer qu'il existe un unique point K sur la droite (FG) tel que le triangle KMN soit rectangle en K.

7. Quelle fraction du volume du cube $\mathrm{ABCDEFGH}$ le volume du tétraèdre FNKM représente-t-il ?